SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Función inversa

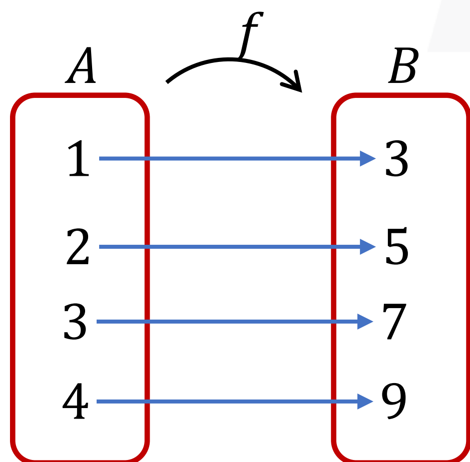
Docente: Phflucker H. Coz

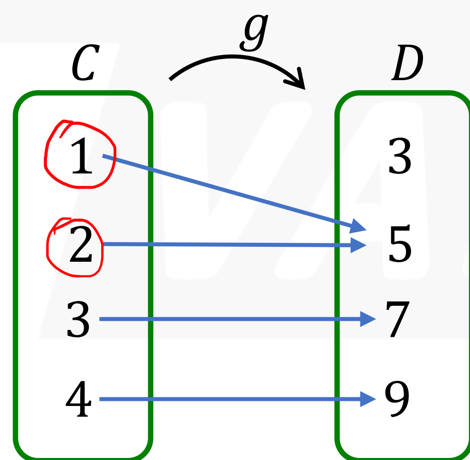
FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE

Una función f es inyectiva si a dos elementos diferentes en el dominio, le corresponden dos elementos diferentes en el rango, es decir:

$$\text{Si } a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b) \quad ; \forall\, a; b \in Domf$$

Ejemplo





f es inyectiva

g no es inyectiva

En forma equivalente:

Una función es inyectiva, si a cada elemento de su rango le corresponde un solo elemento del dominio.

$$\text{Si } f(a) = f(b) \rightarrow a = b \quad ; a; b \in Domf$$

Ejemplo

Pruebe que $f(x) = \dfrac{3}{x-4}; x \neq 4$ es inyectiva

Resolución

Se parte que $f(x_1) = f(x_2) \,/\, x_1; x_2 \in D_f$

$$\frac{3}{x_1-4} = \frac{3}{x_2-4}$$

$$x_2 - 4 = x_1 - 4 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow f$ es inyectiva

Aplicación

Se define la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \langle -1; 1 \rangle$ tal que

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Demostrar si f es inyectiva.

Resolución:

Obs $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; x \in A \\ f_2(x) & ; x \in B \end{cases}$

$f_1 ; f_2$ es inyectiva y $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \phi$

$\Rightarrow f$ es inyectiva

Luego $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & ; -1 < x < \\ \dfrac{x}{1+x} & ; 0 \leq x < 1 \end{cases}$ (−)

* $f(x_1) = f(x_2)$ / $x_1 ; x_2 \in \langle -1 ; 0 \rangle$

$\dfrac{x_1}{1-x_1} = \dfrac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1 - x_1 x_2 = x_2 - x_1 x_2$

$x_1 = x_2$

* $f(x_1) = f(x_2)$ / $x \in [0 ; 1\rangle$

$\dfrac{x_1}{1+x_1} = \dfrac{x_2}{1+x_2} \Rightarrow x_1 + x_1 x_2 = x_2 + x_1 x_2$

$x_1 = x_2$

$\therefore f$ es inyectiva

Nota

- Si la función f es creciente $\forall x \in \text{Dom } f$ entonces f es inyectiva.
- Si la función f es decreciente $\forall x \in \text{Dom } f$ entonces f es inyectiva.

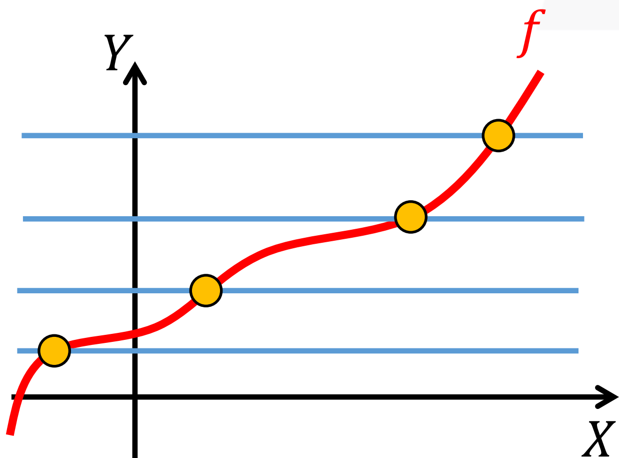
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



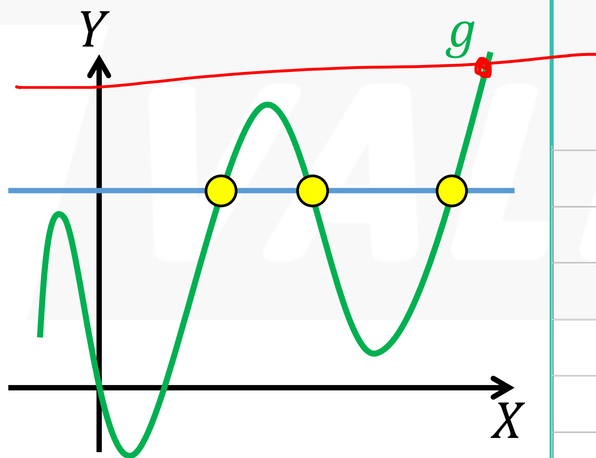
¡Importante!

En forma gráfica, se dice que una función f es inyectiva si toda **recta horizontal**, **corta** a la gráfica de la función **a lo más en un punto**.

Ejemplo



f es inyectiva



g no es inyectiva

FUNCIÓN SOBREYECTIVA O SURYECTIVA

La función $f: A \to B$ es sobreyectiva cuando el conjunto de llegada B es el rango, es decir

f es sobreyectiva $\leftrightarrow$ $Ranf = B$

Aplicación:

Dada la siguiente función f: $[1;6\rangle \to [1;16\rangle$

Tal que $f(x) = 3x - 2$, determine si la función es sobreyectiva.

Resolución:

conjunto de llegada B

$f(x) = 3x - 2$; $1 \leq x < 6$ (creciente)

$f(1) \leq R_f < f(6)$

$1 \leq R_f < 16$

$R_f = [1;16\rangle$ B

∴ f es suryectiva

CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Sea la función suryectiva $f: \langle a; b] \to [-2; 2\rangle$ tal que $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, determine la suma de elementos enteros de su dominio.

Resolución

Cómo es suryectiva $\Rightarrow R_f = [-2; 2\rangle$

(dominio)

$-2 \leq -\frac{x}{2} + 1 < 2$

$-3 \leq -\frac{x}{2} < 1$

por -2: $6 \geq x > -2$

en $\mathbb{Z}$: $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$

Rta 20



¡Importante!

Si en una función **no se indica el conjunto de llegada**, entonces se asume que el rango es el conjunto de llegada por lo tanto la función **es sobreyectiva**.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = 4x^2 - 3x + 2;\ x \in \mathbb{R}$

Como no se indica el conjunto de llegada

$\rightarrow$ f es sobreyectiva

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función f es biyectiva si es **inyectiva y sobreyectiva** a la vez.

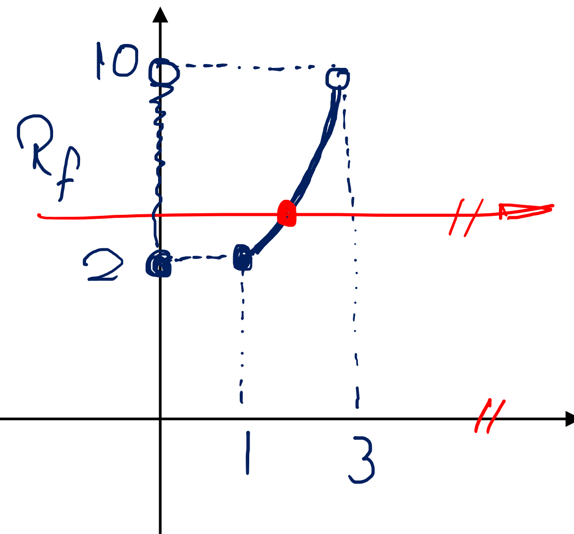
Aplicación

Si $f:[1;3\rangle \longrightarrow [2;10\rangle$ tal que $f(x) = x^2 + 1$.

¿ f es una función biyectiva?

Resolución

$f(x) = x^2+1 \; ; \quad 1 \leq x < 3$



Es inyectiva

$R_f = [2;10\rangle$ = B

∴ es sobreyectiva

⟹ Es biyectiva

FUNCIÓN INVERSA

Sea $f=\{(x;y)/\, x\in Domf, y=f(x)\}$ una función inyectiva. Se define la función inversa f^*(o también f^{-1}) como:

$$f^*=\{\ (y;x)\ /\ x\in Domf, y=f(x)\ \}$$

Ejemplo

Si $f=\{(1;4)\ ;(2;-3)\ ;(-1;0)\ ;(-2;5)\ ;(4;1)\}$

$\rightarrow f^*=\{(4;1)\ ;(-3;2)\ ;(0;-1)\ ;(5;\ -2)\ ;\ (1;\ 4)\}$

Se tiene que

- $Domf^*\ =\{\ 4;-3;0;5;1\ \}\ =\ Ranf$
- $Ranf^*\ =\{\ 1;2;-1;-2;4\ \}\ =Domf$

- $f(1)=4\ \leftrightarrow\ 1=f^*(4)$
- $f(2)=-3\leftrightarrow 2=f^*(-3)$
- $f(-1)=0\ \leftrightarrow\ -1=f^*(0)$

$\vdots$

Obs $f_{(\alpha)}=\beta \Rightarrow f^*_{(\beta)}=\alpha$

Observación:

$$f=\{\ (1;2);\ (3;4);\ (5;4);\ (6;7)\}$$

es una función **no inyectiva**, su inversa

$$f^*=\{\ (2;1)(4;3)(4;5)(7;6)\}$$

no es función.

Por ello es importante la inyectividad de la función, con ello garantizamos la existencia su inversa.

Propiedades:

Sea f una función inyectiva con dominio A y rango B. La función inversa f^* cumple las siguientes propiedades.

1) $\text{Dom} f^* = \text{Ran} f \quad \wedge \quad \text{Ran} f^* = \text{Dom} f$

2) $f(x) = y \leftrightarrow x = f^*(y)$

3) $(f^*)^* = f$

Ejemplo

Si $f = \{(1;4);(2;-3);(-1;0);(-2;5);(4;1)\}$

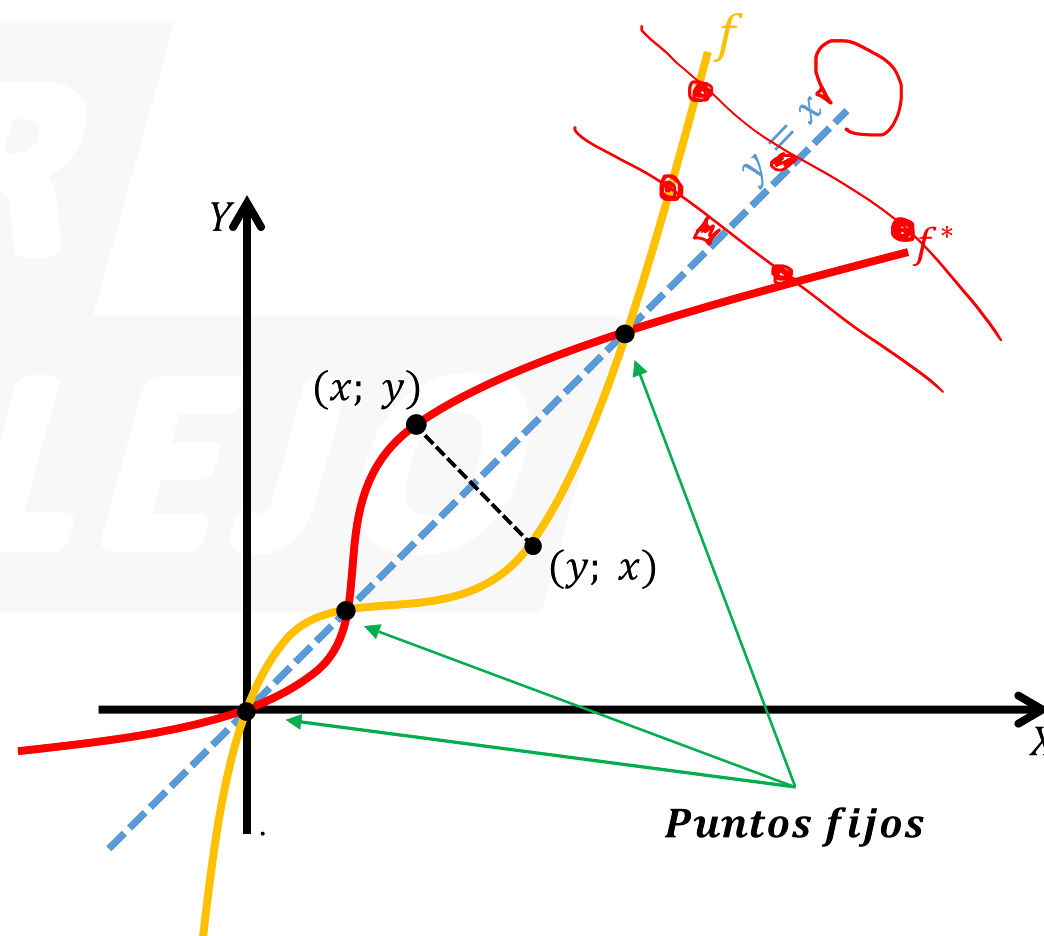
$\rightarrow f^* = \{(4;1);(-3;2);(0;-1);(5;-2);(1;4)\}$

$(f^*)^* = \{(1;4);(2;-3);(-1;0);(-2;5);(4;1)\}$

4) $f \circ f^{-1} = I_B$ donde I_B es la función identidad en B

$f^{-1} \circ f = I_A$ donde I_A es la función identidad en A

5) La gráfica de f^* es simétrica a la gráfica de f respecto a la gráfica de $y = x$



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Cálculo de la función inversa (f^*)

Dado la función $y = f(x);\ x \in Domf$

Para calcular la función inversa, se tiene:

1) Demostrar que f es inyectiva

2) Cálculo del $Domf^*$

Para ello, se calcula el rango de f, porque

$$Ranf = Domf^*$$

3) Cálculo del $y = f^*(x)$

Para ello:

- Se despeja x en función de y
- Se intercambia x con y

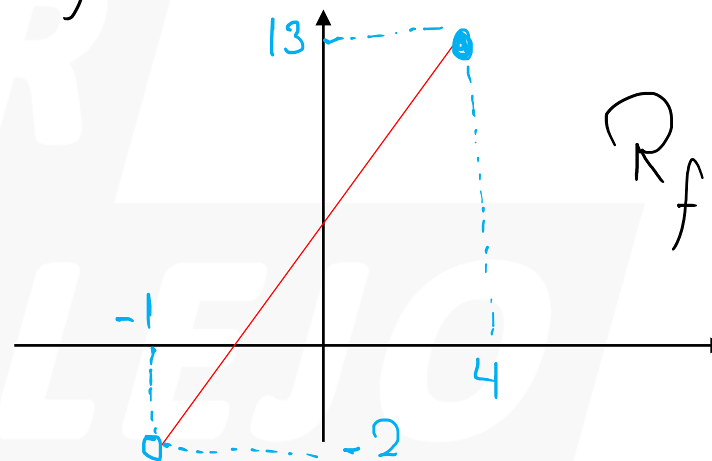
Aplicación

¿?

Dada la función $f\colon \langle -1\,;4] \longrightarrow B$, tal que $f(x) = 3x + 1$, halle f^*.

Resolución

$f(x) = 3x+1 \quad ; \quad -1 < x \leq 4$



$R_f = \langle -2; 13]$

$y = 3x+1$ despejando x: $x = \frac{y-1}{3}$

Intercambio

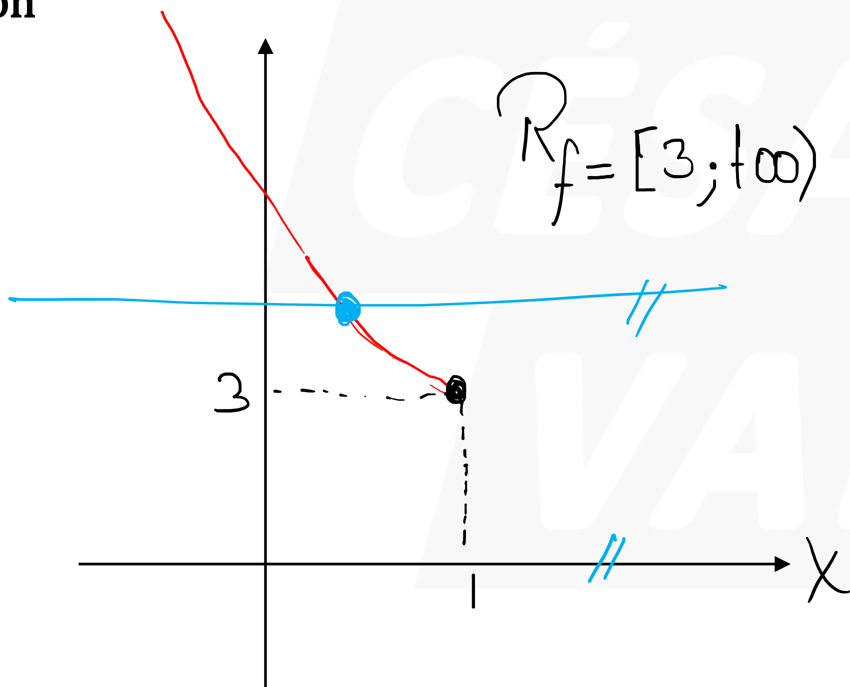
$f^*(x) = \frac{x-1}{3} \quad ; \quad x \in \langle -2; 13]$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Sea $f: \langle -\infty\,; 1] \longrightarrow B$ ¿? una función, tal que $f(x) = x^2 - 2x + 4$; halle su inversa (si es que existe).

Resolución



$f_{(x)} = (x-1)^2 + 3 \; ; \; x \leq 1$

$y = (x-1)^2 + 3$

$(x-1)^2 = y - 3$

$\underbrace{x-1}_{\leq 0} = \sqrt{y-3}$ ✗ $\vee$ $\underbrace{x-1}_{\leq 0} = -\sqrt{y-3}$ ✓

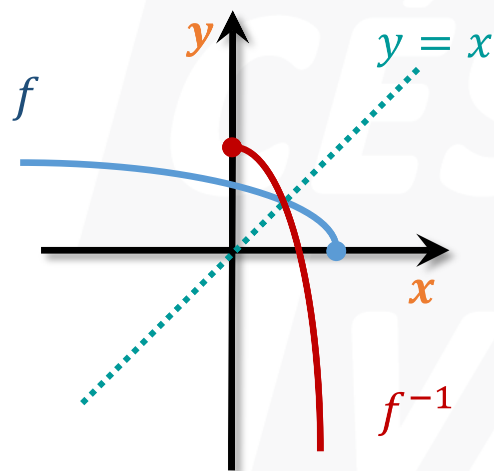
$x = 1 - \sqrt{y-3}$

$\therefore f^*_{(x)} = 1 - \sqrt{x-3} \; ; \; x \geq 3$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

PROPIEDADES:

- Si f es creciente entonces f^{-1} es creciente
- Si f es decreciente entonces f^{-1} es decreciente



Si f y g son inyectivas, y $\mathrm{Dom}(f \circ g) \neq \emptyset$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:
academiacesarvallejo.edu.pe